Good reduction of Kummer surfaces

伊藤, 哲史

代数幾何学シンポジウム記録
2001年度 pp.73-81

Good reduction of Kummer surfaces

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程1年

伊藤 哲史 (Tetsushi Ito) [1]

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

Abstract. 本稿の目的は，完備離散付値体上の Kummer 曲面が整数環上に良い還元 (good reduction) を持つことのモノドロミー作用を用いた判定法を与えることである ([It])．これは古典的にアーベル多様体の時に知られている Néron-Ogg-Shafarevich の判定法 ([ST]) の Kummer 曲面における類似である．応用として，Kummer 曲面の特殊化に関する結果や，代数体上の Kummer 曲面に対する Shafarevich 予想の類似が得られる．最後に，$K3$ 曲面への一般化と Kulikov による半安定退化の極小モデル理論 ([Ku],[PP]) との関係についても述べる．

1. Introduction

K を標数が 2 でない体とし，A を K 上のアーベル曲面とする．このとき，A に定まる加法群の構造から，対合 $\iota\colon A \to A$, $P \mapsto -P$ が定まり，これにより群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\mathrm{id}, \iota\} \subset \mathrm{Aut}_K(A)$ が A に作用する．この作用による A の商空間を $A/\langle\iota\rangle$ と書く．$A/\langle\iota\rangle$ は ι の固定点の像において商特異点を持つ．$A/\langle\iota\rangle$ の極小特異点解消を $\mathrm{Km}(A)$ で表し，**A に伴う Kummer 曲面** (Kummer surface associated to A) という．$\mathrm{Km}(A)$ は K 上の $K3$ 曲面になる．

定義 1.1. X を K 上の固有かつ滑らかな代数曲面とする．X が K 上の **Kummer 曲面** (Kummer surface) とは，ある有限次分離拡大 L/K と，L 上のアーベル曲面 A に対し，同形 $X_L \cong \mathrm{Km}(A)$ が存在することをいう．

K を完備離散付値体，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，F を剰余体とする．このとき，完全系列

$$0 \longrightarrow I_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow 0$$

がある．ここで $\overline{K}, \overline{F}$ はそれぞれ K, F の分離閉包である．I_K を K の**惰性群** (inertia group) という．

[1]Supported by the Japan Society for the Promotion of Science Research Fellowships for Young Scientists.
2001 年代数幾何学城崎シンポジウム報告集, 兵庫県立大会議館, 2001 年 10 月 24 日 (水)
Date: January 13, 2002

定義 1.2. X を K 上の固有かつ滑らかな代数多様体とする．$\mathcal{O}_K$ 上の固有かつ滑らかなスキーム $\mathfrak{X}$ と，K 上の同形 $\mathfrak{X}\otimes_{\mathcal{O}_K}K\cong X$ が存在するとき，X は $\mathcal{O}_K$ 上に**良い還元** (good reduction) を持つという．また，このような $\mathfrak{X}$ を**固有かつ滑らかなモデル** (proper smooth model) という．

以下が本稿の主定理である．より一般的な結果については，定理 4.1 を参照．

定理 1.3 ([It], Theorem 1.3)**.** K を完備離散付値体で，剰余体 F は標数が 2 でない代数閉体であるとする．l を F の標数と異なる素数とする．X を K 上の Kummer 曲面とする．このとき，X が良い還元を持つことと，I_K がエタールコホモロジー $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ に自明に作用することは同値である．

注意 1.4. 定義 1.1 において，アーベル曲面 A や同形 $X\cong \mathrm{Km}(A)$ は，必ずしも K 上定義されているとは限らない．K 上で $\mathrm{Km}(A)$ と表される曲面のみを Kummer 曲面と言う流儀もあるが，本稿で扱う Kummer 曲面の定義は，より一般的なものである．

補足 1.5.
1. X のエタールコホモロジーのうち，I_K が非自明に作用する可能性があるのは $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ のみである．従って，I_K の $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ への作用のみを考えればよい．
2. エタールコホモロジーの底変換定理により，一般に，K 上の固有かつ滑らかな代数多様体 X が良い還元を持てば，I_K はエタールコホモロジーに自明に作用する ([SGA4-III])．従って，定理 1.3 の証明では，この逆が問題となる．
3. X がアーベル多様体の時は，剰余体 F に関わらず，X が良い還元を持つことと，I_K がエタールコホモロジーに自明に作用することは同値であるという Néron-Ogg-Shafarevich の判定法 ([ST]) が知られている．これは定理 1.3 の証明にも用いられる．
4. X が代数曲線の時は，定理 1.3 のような同値性は成り立たない．しかし，I_K がエタールコホモロジーに自明に作用するための必要十分条件を代数曲線の極小モデルの特殊ファイバーの双対グラフの言葉で記述することができる ([Sa])．

2. 幾何学的な説明

定理 1.3 は完備離散付値体やエタールコホモロジーを使って述べられている．ここでは，複素数体上の代数幾何の言葉で，対応する問題を説明する．$K=\mathbb{C}((t))$，$\mathcal{O}_K=\mathbb{C}[[t]]$，$F=\mathbb{C}$ とする．このとき，大雑把に言って，次のような対応が成り立つ ([De])．

$$
\begin{array}{lcl}
K & \longleftrightarrow & \Delta^*=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\} \\
X/K & \longleftrightarrow & \Delta^*\text{ 上の代数多様体の固有かつ滑らかな族 } f\colon \mathfrak{X}^*\to\Delta^* \\
\mathcal{O}_K & \longleftrightarrow & \Delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\} \\
\mathfrak{X}/\mathcal{O}_K & \longleftrightarrow & \Delta\text{ 上の代数多様体の固有かつ滑らかな族 } f\colon\mathfrak{X}\to\Delta \\
H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l) & \longleftrightarrow & \Delta^*\text{ 上の局所系 } \{H^*(X_t,\mathbb{C})\}_{t\in\Delta^*} \\
I_K\cong\widehat{\mathbb{Z}} & \longleftrightarrow & \pi_1(\Delta^*)\cong\mathbb{Z}
\end{array}
$$

もし f が Δ 上の固有かつ滑らかな族に伸びたとすると，その族は位相的には自明な族になるから，モノドロミー作用は自明である．逆に，モノドロミー作用が自明であれば，Δ^* 上の局所系 $\{H^*(X_t, \mathbb{C})\}_{t\in\Delta^*}$ は Δ 上の局所系に延びる．この対応に従って，定理 1.3 を言い変えると，次のようになる．

定理 2.1. $f\colon \mathfrak{X}^* \to \Delta^*$ を Kummer 曲面の族とする．このとき，f が Δ 上の固有かつ滑らかな族に延長できることと，Δ^* 上の局所系 $\{H^*(X_t, \mathbb{C})\}_{t\in\Delta^*}$ が Δ 上の局所系に延長できることは同値である．

後で述べる予想 6.1 のように，この定理の一般化や類似を様々な状況で考えることは，代数多様体のモジュライがそのコホモロジーでどの位捉えられるかという観点から，興味深い問題であると思われる．

3. 主定理 (定理 1.3) の証明

今まで通り，K を完備離散付値体，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，F を剰余体とし，I_K を K の惰性群とする．F の標数は 2 でないと仮定する．また，l を F の標数と異なる素数とする．

定理 1.3 の証明は，以下の 2 つの部分に分かれる．

1. K 上のアーベル曲面 A に対し $X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書けるときに定理 1.3 を示す (命題 3.3)．(ここでは F は代数閉である必要はない)
2. 一般の X に対しては次を示すことで上の場合に帰着させる：X が定理 1.3 の仮定をみたすとき，K 上のアーベル曲面 A に対し，$X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける (命題 3.5, 系 3.6)．

注意 3.1. 注意 1.4 でも述べたように，本稿における Kummer 曲面の定義 1.1 においては，アーベル曲面 A は必ずしも K 上定義されているとは限らないことに注意せよ．

以下では 1.,2. の証明のアイデアを説明する (証明の細部については，[It] を参照)．

1. $X \cong \mathrm{Km}(A)$ **と書ける場合．** この場合は，A の様子を調べることで，X の固有かつ滑らかなモデルを構成する．しかし，$X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける場合でも，A は必ずしも良い還元を持つとは限らず，A の 2 次捻りをうまく取る必要がある．

まずは，2 次捻りについて復習しよう．A を K 上のアーベル曲面，L/K を 2 次拡大とする．このとき，非自明な元 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ はスキーム $A \otimes_K L$ に「$\mathrm{id} \otimes \sigma$」という形で標準的に作用するが，この作用を次のように捻る：$\iota\colon A \to A$ を対合とし，σ の作用を「$\iota \otimes \sigma$」で与える．これにより，$\mathrm{Gal}(L/K)$ の $A \otimes_K L$ への「捻った作用」が得られ，この作用による商を A' で表す．A' は K 上のアーベル曲面であり，$A' \otimes_K L \cong A \otimes_K L$ をみたす．A' を A の L/K による **2 次捻り** (quadratic twist) という．

補題 3.2. A のある 2 次捻り A' が良い還元を持つとする．このとき，$\mathrm{Km}(A)$ は良い還元を持つ．

証明. A' の固有かつ滑らかなモデルを $\mathcal{A}'$ とおくと，$\mathcal{A}'$ は A' の Néron モデルである ([BLR])．よって，対合 ι は $\mathcal{A}'$ 上に延長され，それを用いて $\mathcal{O}_K$ 上相対的に Kummer 曲面の構成を行えば，$\mathrm{Km}(A')$ の固有かつ滑らかなモデル $\mathrm{Km}(\mathcal{A}')$ が得られる (本稿では剰余体 F の標数は 2 ではないことに注意)．従って,「A' が良い還元を持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{Km}(A')$ が良い還元を持つ」が分かる．一方，A と A' は対合 ι の「ずれ」しかないので，その商は同形である：$A/\langle\iota\rangle \cong A'/\langle\iota\rangle$．特に $\mathrm{Km}(A) \cong \mathrm{Km}(A')$ であるから，$\mathrm{Km}(A)$ も良い還元を持つことが分かる． □

命題 3.3. A を K 上のアーベル曲面とし，$\mathrm{Km}(A)$ を A に伴う Kummer 曲面とする．もし I_K の $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用が自明であれば，A の 2 次捻り A' であって良い還元を持つものが存在する．特に，補題 3.2 により，$\mathrm{Km}(A)$ は良い還元を持つ．

証明. Kummer 曲面の構成法により，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用を保つ同形

$$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \cong H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \oplus V$$

がある．ここで，V は，$\mathbb{Q}_l$ 上の 16 次元のベクトル空間で，$A/\langle\iota\rangle$ の特異点解消の例外因子のコホモロジー類 (の Tate 捻り) によって生成されるものである．

I_K の $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用が自明であれば，I_K の $H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用も自明である．一方，アーベル曲面 A のコホモロジーには，カップ積による同形

$$H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \cong \bigwedge^2 H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$$

がある．これより，I_K が $H^2_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に自明に作用していたとしても，$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に自明に作用するとは限らないことが分かる．

ところで，$\dim H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) = 4 \geq 3$ であるから，簡単な線形代数の考察により，I_K の $H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用は，ある写像 $\rho : I_K \to \{\pm 1\}$ を経由する．ρ に対応する K の完全分岐 2 次拡大を L/K とし，L/K による A の 2 次捻りを A' とする．このとき，I_K の $H^1_{\text{ét}}(A'_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用は，2 次捻りによってキャンセルされ，自明になる ($H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は A の Tate 加群 (の Tate 捻り) と同形だから，ι は $H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に -1 倍で作用することに注意せよ)．よって，アーベル曲面に対する Néron-Ogg-Shafarevich の判定法により，A' は良い還元を持つ． □

2. **一般の場合.** この場合は，$X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書けることを示すことで，上の場合に帰着させる．

一般に，K を標数が 2 でない体とし，X を K 上の Kummer 曲面とする．このとき，定義 1.1 より，K の分離閉包 $\overline{K}$ 上のアーベル曲面 A に対し，同形 $X_{\overline{K}} \cong \mathrm{Km}(A)$ が存在する．$\mathrm{Km}(A)$ は $A/\langle\iota\rangle$ の 16 個の特異点における爆発 (blow up) として定義されるが，一

方，先に A の 16 個の 2 等分点における爆発 $\widetilde{A} \to A$ をとり，ι の持ち上げ $\tilde{\iota}$ の作用による商 $\widetilde{A}/\langle\tilde{\iota}\rangle$ をとっても同じ Km(A) が得られる：$X_{\overline{K}} \cong \mathrm{Km}(A) \cong \widetilde{A}/\langle\tilde{\iota}\rangle$．よって，以下の可換図式を得る．

$$
\begin{array}{ccc}
A & \longleftarrow & \widetilde{A} \supset D \\
\big\downarrow & & \big\downarrow f \\
A/\langle\iota\rangle & \longleftarrow & \mathrm{Km}(A) \supset f(D)
\end{array} \tag{3.1}
$$

ここで $f\colon \widetilde{A} \to \mathrm{Km}(A)$ は 2 重被覆で，爆発 $\widetilde{A} \to A$ の例外因子 $D \subset \widetilde{A}$ で分岐するものである．ここで D の像 $f(D)$ は自己交点数が -2 の 16 本の有理直線の疎な和 (disjoint union) である．

補題 3.4. X を体 K 上の代数多様体とし，K が完備離散付値体で剰余体が代数閉体であるか，または，X は少なくとも一つの K 有理点を持つとする．このとき，$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$ が成り立つ．

証明. Hochschild-Serre のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), H^q_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$$

と Hilbert の定理 90 から，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \longrightarrow H^2(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \overline{K}^{\times}) \xrightarrow{\ \varphi\ } H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$$

が得られる．ここで，φ が単射であることを示せばよい．まず，K が完備離散付値体で剰余体が代数閉体のときは，$H^2(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \overline{K}^{\times}) = 0$ だから良い ([Se])．また，X が K 有理点 $s : \mathrm{Spec}\, K \to X$ を持つときは，$s^* : H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m) \to H^2(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), \overline{K}^{\times})$ は $s^* \circ \varphi = \mathrm{id}$ をみたすから，φ が単射であることが分かる． □

命題 3.5. K を標数が 2 でない体とし，X を K 上の Kummer 曲面とし，以下を満たすとする．

1. $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ に自明に作用する．
2. F は代数閉体であるか，または，X は少なくとも一つの K 有理点を持つ．

このとき，K 上のアーベル曲面 A に対し $X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける．

証明. 可換図式(3.1) が K 上定義されればよい．$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ に自明に作用するから，補題3.4 より因子 $f(D)$ は K 上定義される．巡回分岐被覆の一般論 ([BPV],I,17) により被覆 $f\colon \widetilde{A} \to \mathrm{Km}(A)$ も K 上定義される．さらに，自己交点数を考えることで，$f(D)$ の各成分の有理曲線が K 上定義されることが分かる．これにより，可換図式(3.1) が K 上定義され，アーベル曲面 A が K 上定義されることが分かる． □

系 3.6. K, X が定理 1.3 の条件を満たしていれば，K 上のアーベル曲面 A に対し $X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける．

証明. $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ であり，サイクル写像によって $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}}) \subset H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l(1))$ であるから，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ に自明に作用する．よって題意は命題3.5から従う． □

4. まとめ

以上により，定理1.3よりもやや一般的な形でKummer曲面に対する良い還元の判定法が示された．やや条件が長いが，後での便宜のために結果を述べておく．

定理 4.1. K を完備離散付値体で，剰余体 F は標数が2でないとし，l を F の標数と異なる素数とする．X を K 上のKummer曲面とし，以下を満たすとする．

1. I_K は $H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に自明に作用する．
2. $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ に自明に作用する．
3. F は代数閉体であるか，または，X は少なくとも一つの K 有理点を持つ．

このとき，K 上のアーベル曲面 A で良い還元を持つものに対し，$X \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける．特に X は良い還元を持つ．

注意 4.2. F が代数閉体で I_K の $H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用が自明ならば，系3.6の証明と同様に，$I_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ と $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}}) \subset H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l(1))$ から定理4.1の条件はすべて満たされる．よって，定理1.3は定理4.1から導かれる．

系 4.3. K を完備離散付値体で，剰余体 F は標数が2でないとし，l を F の標数と異なる素数とする．X を K 上のKummer曲面とする．このとき，K の有限次拡大 L 上で X_L が良い還元を持つことと，I_K が $H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に有限商を経由して作用することは同値である．

系 4.4. K を完備離散付値体で，剰余体 F は標数が2でない完全体とする．l を F の標数と異なる素数とする．X を K 上のKummer曲面とする．F は代数閉体であるか，または，X は少なくとも一つの K 有理点を持つとする．このとき，K の有限次不分岐拡大 L 上で X_L が良い還元を持つことと，I_K が $H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ に自明に作用することは同値である．

注意 4.5. L/K を有限次不分岐拡大とし，X を K 上のアーベル多様体とすると，Galois降下定理により，X が良い還元を持つことと，X_L が良い還元を持つことは同値である([BLR])．しかし，Kummer曲面に対しては，基本操作(elementary operation)と呼ばれる現象の存在により([BR])，このようなことは成り立たないのではないかと思われる．

5. 応用

5.1. **Kummer曲面の特殊化.** 定理4.1の証明における固有かつ滑らかなモデルの構成法の系として，以下の命題が得られる．

命題 5.1. K を完備離散付値体で，剰余体 F は標数が 2 でないと仮定する．X を K 上の Kummer 曲面とし，良い還元を持つと仮定する．$\mathfrak{X}$ を X の固有かつ滑らかなモデルとする．このとき，$\mathfrak{X}$ の特殊ファイバーは Kummer 曲面である．

証明. まず，以下のことを注意しよう：$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ を X の固有かつ滑らかなモデルとする．このとき，$\mathfrak{X}$ と $\mathfrak{X}'$ は同形とは限らないが，その特殊ファイバーは同形である ([BR],[MM])．

さて，l を F の標数と異なる素数とする．エタールコホモロジーの底変換定理より，I_K の $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ への作用は自明である．

$\mathfrak{X}$ は $\mathcal{O}_K$ 上滑らかなので，剰余体の拡大が分離拡大であるような十分大きな有限次分離拡大 L/K に対し，X_L は L 有理点を持ち，$\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ の $\mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})$ への作用は自明になる．定理 4.1 より，L 上の良い還元を持つアーベル曲面 A に対し $X_L \cong \mathrm{Km}(A)$ と書ける．よって，上に述べた注意により，$\mathfrak{X} \otimes \mathcal{O}_L$ の特殊ファイバーは Kummer 曲面であり，従って $\mathfrak{X}$ の特殊ファイバーも Kummer 曲面であることが分かる． □

これは，標数が 2 でない場合に，自然な射

$$(\text{Kummer 曲面のモジュライ空間}) \hookrightarrow (K3 \text{ 曲面のモジュライ空間})$$

が固有射であることを意味する．この結果自体は (特に $\mathbb{C}$ 上であれば) 既に知られていたものと思われる．

5.2. **代数体上の Kummer 曲面に対する Shafarevich 予想の類似.** 定理 4.1 の証明に使われたアーベル曲面の定義体に関する結果の応用として，代数体上の Kummer 曲面に対する Shafarevich 予想の類似が得られる．

命題 5.2. K を代数体とし，S を K の素点の有限集合ですべての無限素点を含むものとする．このとき，K 上の Kummer 曲面 X であって，少なくとも一つの K 有理点を持ち，S の外で良い還元を持つものは，K 上の同形を除いて有限個しか存在しない．

証明の方針. 証明のポイントは，Hermite-Minkowski の定理と類数の有限性を用いて，X に依存しない有限次拡大 L/K と，L の素点の有限集合 S' であって，以下をみたすものをとることである．

1. S' は S の上にある素点および 2 を割り切る素点をすべて含む．
2. 命題 5.2 の条件をみたす任意の X に対し，L 上のアーベル曲面 A であって，S' の外で良い還元を持ち，$X_L \cong \mathrm{Km}(A)$ をみたすものが存在する．

このような A の有限性は Faltings と Zarhin によるアーベル多様体の Shafarevich 予想から従う ([Fa],[Za])．これより X_L の有限性が分かる．また，各 X_L に対し，$X_L \cong X'_L$ となる X' は有限個しか存在しないことが，Aut スキームの有限性から分かる ([FGA])．これより X の有限性が従う． □

注意 5.3. 命題5.2の証明の中でも用いたが，アーベル多様体に対するShafarevich予想はFaltingsとZarhinによって示されている([Fa], 偏極の無い場合は[Za])．また，偏極超Kähler多様体に対するShafarevich予想の類似がAndréによって得られている([A])．ただし，命題5.2では偏極の次数を固定していないので，Andréの結果には含まれないと思われる(もちろん，証明の方針は異なる)．この違いは証明の構造の違いに起因する．すなわち，命題5.2では直接Kummer曲面を構成するアーベル曲面の有限性に帰着させる(「アーベル曲面の有限性 ⇒Kummer曲面の有限性」は自明である)．一方，Andréの方法では，超Kähler多様体の周期を与えるアーベル多様体(久賀-佐武多様体)の有限性に帰着させるため，偏極の次数を固定せずには有限性が示せないと思われる．

6. $K3$曲面の場合 — 極小モデル理論との関係

ここでは本稿における主定理と，**極小モデル**(minimal model)理論との関係を述べる．Δ^*上の代数多様体の族のΔ上への延長について考える際に，ある意味で「標準的な延長」を考えるのが極小モデル理論である．

アーベル多様体の族$\mathcal{A}^* \to \Delta^*$に対しては，**Néronモデル**(Néron model)と呼ばれる標準的な延長$\mathcal{A} \to \Delta$が存在する([BLR])．そして，$\mathcal{A}^*$がΔ上の固有かつ滑らかな族に延長されることと，そのNéronモデル$\mathcal{A} \to \Delta$が固有かつ滑らかであることは同値である．従って，Néronモデル$\mathcal{A}$が固有かつ滑らかであるか(すなわち，$\mathcal{A}$がアーベル多様体の族であるか)を調べれば良い．実際，Néron-Ogg-Shafarevichの判定法の証明には，Néronモデルの存在が本質的な役割を果たす．

Kummer曲面の族については，一般には極小モデル理論は存在しないので，このような論法が使えない．

しかし，$\mathbb{C}$上の$K3$曲面の族の**半安定退化**(semistable degeneration)に関してはKulikovによる極小モデル理論が存在し([Ku],[PP])，その系として，定理2.1の$K3$曲面に対する類似を，半安定な退化を持つ場合に示すことができる．

一般には$K3$曲面の族は半安定な退化を持つとは限らないので，Kulikovの理論は使えないが，それにも関わらず，Kummer曲面について定理2.1が成り立つことから，$K3$曲面について次のような予想を立てることは意味のあることに思われる．

予想 6.1. $f\colon \mathfrak{X}^* \to \Delta^*$を$K3$曲面の族とする．このとき，$f$が$\Delta$上の固有かつ滑らかな族に延長できることと，$\Delta^*$上の局所系$\{H^*(X_t, \mathbb{C})\}_{t\in\Delta^*}$が$\Delta$上の局所系に延長できることは同値である．

定理2.1により，Kummer曲面の族に対しては予想6.1は正しい．また，上にも述べたように，$f\colon \mathfrak{X}^* \to \Delta^*$が半安定な退化を持つ場合は，Kulikovの極小モデル理論により予想6.1は正しい．さらに，Kulikovは，$\pi_1(\Delta^*)$の局所系へのモノドロミー作用の様子と，半安定退化の極小モデルの退化の関係について，より精密な結果を得ている．しか

し，半安定とは限らない退化については，分からないことが多いようである (正標数や混標数の場合の半安定退化の極小モデル理論については [Ka] を参照).

謝辞. 本稿の内容は筆者の修士論文 ([It]) で得られた結果が元になっている．この場を借りて，様々な形でアドバイスをくださった皆様に感謝する．特に，指導教官の斎藤毅先生，そして代数幾何・数論幾何について多くのことを教えてくださった加藤和也先生，藤原一宏先生に感謝する．また，$K3$ 曲面の予想 6.1 に関する記述は，小木曽啓示先生，川又雄二郎先生，寺杣友秀先生，宮岡洋一先生，森重文先生の御教示による部分が大きい．この場を借りて感謝したい．また，最後に，講演の機会をくださった徳永浩雄先生，小林正典先生に感謝します.

REFERENCES

[A] Y. André, *On the Shafarevich and Tate conjectures for hyper-Kähler varieties*, Math. Ann. **305** (1996), no. 2, 205–248.

[BPV] W. Barth, C. Peters and A. van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer, Berlin, 1984.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron models*, Springer, Berlin, 1990.

[BR] D. Burns, Jr., M. Rapoport, *On the Torelli problem for kahlerian $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **8** (1975), no. 2, 235–273.

[De] P. Deligne, *Théorie de Hodge I*, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, 425–430, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Fa] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366.

[It] T. Ito, *Good reduction of Kummer surfaces*, master's thesis, 2001.

[Ka] Y. Kawamata, *Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 463–491.

[Ku] Vik. S. Kulikov, *Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces.* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 5, 1008–1042, 1199.

[MM] T. Matsusaka, D. Mumford, *Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties*, Amer. J. Math. **86** (1964), 668–684.

[PP] U. Persson and H. Pinkham, *Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 45–66.

[Sa] T. Saito, *Vanishing cycles and geometry of curves over a discrete valuation ring*, Amer. J. Math. **109** (1987), no. 6, 1043–1085.

[Se] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Deuxieme edition, Hermann, Paris, 1968.

[ST] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Za] Yu. G. Zarhin, *A finiteness theorem for unpolarized abelian varieties over number fields with prescribed places of bad reduction*, Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 309–321.

[FGA] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique. [Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957–1962.]*, Secrétariat Math., Paris, 1962.

[SGA4-III] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Math., 305, Springer, Berlin, 1973.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO

E-mail address: itote2@ms.u-tokyo.ac.jp